

1 大きさの話

地球がドーナツ型だったときの表面に働く重力を考える。ここで現在の地球と地球の体積がほぼ同じになるようにドーナツ型の地球のサイズを考える。

ここでのドーナツ型は $(\sqrt{x^2 + y^2} - 2R)^2 + z^2 < R^2$ を満たす部分の物体と考える。

このときこの物体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R ((2R + \sqrt{R^2 - z^2})^2 - (2R - \sqrt{R^2 - z^2})^2) dz \\ &= 8\pi R \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - z^2} dz \\ &= 4\pi^2 R^3 \end{aligned}$$

実際の地球の体積はおよそ $1 * 10^{12} (km^3)$ なので、 R は $R = 3 * 10^6 (m)$ と置ける

2 万有引力の話

地球と物体の間の万有引力は、地球を微小部分に分割してそれぞれからの万有引力を積分することによって求められる。

ドーナツ型の積分は難しいので、ドーナツ型とドーナツ型の内側を足した部分の積分からドーナツ型の内側の積分を引いてドーナツ型の積分を求める。さらに地上の物体の質量を $m(kg)$ と置き、地球の密度を $\rho(kg/m^3)$ と置いて万有引力を求めていく。

2.1 外側の万有引力

ドーナツ外側部分座標 $(3R, 0, 0)$ の万有引力 \mathbb{F} をの x 成分を体積積分を使って求める。

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_x &= Gm \iiint_V \frac{-(3R-x)\rho}{((3R-x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz \\
 t_1 &= \frac{-(3R-x)\rho}{((3R-x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{積分内部を } t_1 \text{ と置く}) \\
 &= Gm \int_{-R}^R dz \int_{-2R-\sqrt{R^2-z^2}}^{2R+\sqrt{R^2-z^2}} dy \int_{-\sqrt{5R^2-y^2-z^2+4R\sqrt{R^2-z^2}}}^{\sqrt{5R^2-y^2-z^2+4R\sqrt{R^2-z^2}}} t_1 dx \\
 &\quad - Gm \int_{-R}^R dz \int_{-2R+\sqrt{R^2-z^2}}^{2R-\sqrt{R^2-z^2}} dy \int_{-\sqrt{5R^2-y^2-z^2-4R\sqrt{R^2-z^2}}}^{\sqrt{5R^2-y^2-z^2-4R\sqrt{R^2-z^2}}} t_1 dx \\
 &\quad R = 3 * 10^6 \text{を代入して積分を近似計算すると} \\
 &= Gm\rho * (-2.47 * 10^7 + 3.13 * 10^6) \\
 &\quad G = 6.67 * 10^{-11}, \rho = 5.52 * 10^3 \text{を代入して積分を近似計算すると} \\
 &= 6.67 * 10^{-11} * 5.52 * 10^3 * (-2.16 * 10^7)m \\
 &= -7.95m(N)
 \end{aligned}$$

2.2 内側の重力

ドーナツ内側部分つまり座標 $(R, 0, 0)$ の万有引力 \mathbb{F} を体積積分を使って求める。

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_x &= Gm \iiint_V \frac{-(R-x)\rho}{((R-x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz \\
 t_2 &= \frac{-(R-x)\rho}{((R-x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{積分内部を } t_2 \text{ と置く}) \\
 &= Gm \int_{-R}^R dz \int_{-2R-\sqrt{R^2-z^2}}^{2R+\sqrt{R^2-z^2}} dy \int_{-\sqrt{5R^2-y^2-z^2+4R\sqrt{R^2-z^2}}}^{\sqrt{5R^2-y^2-z^2+4R\sqrt{R^2-z^2}}} t_2 dx \\
 &\quad - Gm \int_{-R}^R dz \int_{-2R+\sqrt{R^2-z^2}}^{2R-\sqrt{R^2-z^2}} dy \int_{-\sqrt{5R^2-y^2-z^2-4R\sqrt{R^2-z^2}}}^{\sqrt{5R^2-y^2-z^2-4R\sqrt{R^2-z^2}}} t_2 dx \\
 &\quad R = 3 * 10^6 \text{を代入して積分を近似計算すると} \\
 &= Gm\rho * (-6.54 * 10^6 + 1.55 * 10^7) \\
 &= 6.67 * 10^{-11} * 5.52 * 10^3 * 9.0 * 10^6 m \\
 &= 3.3m(N)
 \end{aligned}$$